

BAND GAPS ELECTROMAGNÉTICOS UNIDIMENSIONALES EN GUÍA DE ONDA RECTANGULAR

Álvaro Gómez Gómez

Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Cantabria
e-mail: gomezal@unican.es

Miguel A. Solano

Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Cantabria
e-mail : solanom@unican.es

Akhlesh Lakhtakia

Dpto. Engineering Science and Mechanics
Pennsylvania State University
e-mail : AXL4@psu.edu

Ángel Vegas

Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Cantabria
e-mail : vegasa@unican.es

Abstract- En esta comunicación se analiza la propagación, para modos TE y modos TM, en guía de onda rectangular, de una estructura periódica formada por un número de celdas dieléctricas constituidas por dos dieléctricos de diferente permitividad. El análisis se efectúa primeramente para una estructura ideal infinita, a través del teorema de Floquet, y después se realiza una análisis de la estructura real, en la que se tiene en cuenta una periodicidad finita (número de celdas finito). Estas estructuras forman “band gaps” electromagnéticos (EBG’s), con bandas de frecuencia admitidas y prohibidas a la propagación.

I. INTRODUCCIÓN

Las estructuras denominadas “Band Gap” Electromagnéticos (EBG’s) admiten la propagación de una onda electromagnética en ciertas bandas de frecuencia (bandas admitidas) pero no dejan pasar la energía en otras (bandas prohibidas). Esta propiedad hace que estas estructuras sean útiles para la construcción de diferentes dispositivos o para mejorar su comportamiento, tanto a frecuencias ópticas como de microondas y ondas milimétricas. Entre ellos se pueden nombrar, microcavidades para conmutadores ópticos, reflectores, filtros en tecnología planar, filtros ópticos etc [1-6].

Una estructura EBG común está compuesta por múltiples láminas dieléctricas ...ABABAB... donde “A” es un dieléctrico de mayor permitividad que el dieléctrico denotado con la letra “B” [7]. Este tipo de estructuras es muy común a frecuencias en el rango óptico o ultravioleta, y su estructura deriva del modelo de Kronig-Penney en la teoría de bandas de Física del Estado Sólido [8]. A estas frecuencias, el estudio de estas estructuras considera que las láminas dieléctricas son de extensión infinita en el plano transversal a la dirección de propagación de la onda electromagnética [9]. Esto se puede hacer a estas frecuencias porque la longitud de onda es mucho menor que las

dimensiones transversales del dispositivo. Sin embargo, a frecuencias de microondas u ondas milimétricas, esta aproximación no es muy apropiada, pues la longitud de onda es del orden de las dimensiones transversales. Tal es el caso de una estructura en guía de onda rectangular.

Por otro lado, una forma típica de analizar estas estructuras es suponerlas infinitas en la dirección longitudinal, es decir, el número de celdas unidad ..AB... es infinito (estructura ideal). Esta idealización admite utilizar el teorema de Floquet, lo que simplifica bastante el desarrollo matemático. Sin embargo, una estructura real contiene sólo un número finito de celdas unidad y, por tanto, el teorema de Floquet no se puede utilizar. En este caso, se recurre a la aplicación de las condiciones de contorno de forma sistemática. El resultado final tiende al resultado de la estructura ideal a medida que de celdas crece.

II. TEORÍA

A) Estructura ideal

La figura 1 muestra una guía de onda rectangular, con paredes perfectamente conductoras, llena con infinitas celdas dieléctricas cada una de ellas compuesta por dos medios dieléctricos de permitividades diferentes.

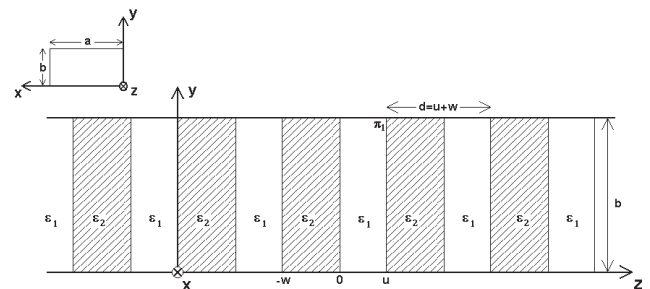


Fig. 1. Estructura EBG ideal en guía rectangular.

Consideremos una celda unidad colocada en $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$; se cumple que

$$\varepsilon(x, y, z+d) = \varepsilon(x, y, z), \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, |z| < \infty$$

y la celda unidad caracterizada por

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} & \text{if } 0 \leq z \leq u \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} & \text{if } -w \leq z \leq 0 \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$$

siendo ε_{r_i} las permitividades relativas de los dos medios y ε_0 la permitividad del vacío. El período espacial en la dirección longitudinal es $d=u+w$. Para propagación en la dirección z , los modos TE se pueden obtener del potencial vector eléctrico $\vec{a}_z F_z$ [10] que cumple la ecuación de Helmholtz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon(z) k_0^2 \right) F_z(x, y, z) = 0$$

donde k_0 es el número de onda en el vacío. Las componentes del campo electromagnético son

$$\begin{aligned} E_x &= -(1/\varepsilon) \partial F_z / \partial y \\ E_y &= (1/\varepsilon) \partial F_z / \partial x \\ H_x &= -j(\omega \mu_0 \varepsilon)^{-1} \partial^2 F_z / \partial x \partial z \\ H_y &= -j(\omega \mu_0 \varepsilon)^{-1} \partial^2 F_z / \partial y \partial z \\ H_z &= -j(\omega \mu_0 \varepsilon)^{-1} (\partial^2 / \partial z^2 + \beta_{mn}^2) F_z \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones de contorno sobre las paredes perfectamente conductoras, la solución para el potencial en la celda unidad es

$$\begin{aligned} F_z(x, y, z) &= \sum_{m, n \in \mathbb{N}} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{mn}z} + \\ &+ \sum_{m, n \in \mathbb{N}} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j\beta_{mn}z}, \quad 0 \leq z \leq u, \\ F_z(x, y, z) &= \sum_{m, n \in \mathbb{N}} C_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_{mn}z} + \\ &\sum_{m, n \in \mathbb{N}} D_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j\beta_{mn}z} \quad -w \leq z \leq 0. \end{aligned}$$

donde n y m son los índices de los modos, $m, n \in \mathbb{N}$, $\beta_{1,2}$ son las constantes de fase $\beta_{1,2mn}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{1,2} - k_{c_{mn}}^2$,

siendo $k_{c_{mn}} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$ el número de onda de corte y, finalmente, A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} y D_{mn} son los coeficientes del desarrollo modal. Aplicando las condiciones de continuidad para las componentes tangenciales en $z=0$ y, ya que los modos en las dos secciones de la celda unidad, son ortogonales entre sí, se obtiene

$$\frac{1}{\varepsilon_{r_1}} (A_{mn} + B_{mn}) - \frac{1}{\varepsilon_{r_2}} (C_{mn} + D_{mn}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_1}} (A_{mn} - B_{mn}) - \frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_2}} (C_{mn} - D_{mn}) = 0 \quad (2)$$

Por otro lado, la periodicidad de la estructura EBG analizada permite aplicar el teorema de Floquet para las componentes tangenciales (x e y) del campo como

$$E_{x,y}(x, y, z) \Big|_{z=u} = E_{x,y}(x, y, z) \Big|_{z=-w} e^{j\gamma d}$$

$$H_{x,y}(x, y, z) \Big|_{z=u} = H_{x,y}(x, y, z) \Big|_{z=-w} e^{j\gamma d}$$

donde γ es el número de onda de Bloch que debe ser real en las bandas de frecuencia admitidas. Se obtiene entonces

$$\frac{1}{\varepsilon_{r_1}} (A_{mn} e^{-j(\beta_{mn} + \gamma)u} + B_{mn} e^{j(\beta_{mn} - \gamma)u}) - \frac{1}{\varepsilon_{r_2}} (C_{mn} e^{j(\beta_{mn} + \gamma)w} + D_{mn} e^{-j(\beta_{mn} - \gamma)w}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_1}} (A_{mn} e^{-j(\beta_{mn} + \gamma)u} - B_{mn} e^{j(\beta_{mn} - \gamma)u}) - \frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_2}} (C_{mn} e^{j(\beta_{mn} + \gamma)w} - D_{mn} e^{-j(\beta_{mn} - \gamma)w}) = 0 \quad (4)$$

En forma matricial las ecuaciones (1-4) son

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_{r_1}} & \frac{1}{\varepsilon_{r_1}} & -\frac{1}{\varepsilon_{r_2}} & -\frac{1}{\varepsilon_{r_2}} \\ \frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_1}} & -\frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_1}} & -\frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_2}} & \frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_2}} \\ \frac{1}{\varepsilon_{r_1}} e^{-j(\beta_{mn} + \gamma)u} & \frac{1}{\varepsilon_{r_1}} e^{j(\beta_{mn} - \gamma)u} & -\frac{1}{\varepsilon_{r_2}} e^{-j(\beta_{mn} + \gamma)w} & -\frac{1}{\varepsilon_{r_2}} e^{j(\beta_{mn} - \gamma)w} \\ \frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_1}} e^{-j(\beta_{mn} + \gamma)u} & -\frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_1}} e^{j(\beta_{mn} - \gamma)u} & -\frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_2}} e^{j(\beta_{mn} + \gamma)w} & \frac{\beta_{mn}}{\varepsilon_{r_2}} e^{-j(\beta_{mn} - \gamma)w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema anterior tenga solución no trivial, es necesario que la matriz sea singular; entonces se obtiene la siguiente relación de dispersión

$$\cos[\gamma(u+w)] = \cos(\beta_{1mn}u) \cos(\beta_{2mn}w) - \frac{\beta_{1mn}^2 + \beta_{2mn}^2}{2\beta_{1mn}\beta_{2mn}} \sin(\beta_{1mn}u) \sin(\beta_{2mn}w)$$

de donde se puede despejar el valor de γ , como

$$\gamma = \frac{1}{u+w} \cos^{-1}(L_{TE_{mn}^z}) \quad (5)$$

siendo

$$L_{TE_{mn}^z} = \cos(\beta_{1mn}u) \cos(\beta_{2mn}w) - \frac{\beta_{1mn}^2 + \beta_{2mn}^2}{2\beta_{1mn}\beta_{2mn}} \sin(\beta_{1mn}u) \sin(\beta_{2mn}w) \quad (6)$$

Procediendo de manera totalmente similar para los modos TM con el potencial vector magnético $\vec{a}_z A_z$ [10] se obtiene una ecuación similar a la anterior reemplazando $L_{TE_{mn}^z}$ por

$$L_{TM_{mn}^z} = \cos(\beta_{1mn}u) \cos(\beta_{2mn}w) - \frac{\beta_{1mn}^2 \varepsilon_{r_2} + \beta_{2mn}^2 \varepsilon_{r_1}}{2\beta_{1mn}\beta_{2mn}\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}} \sin(\beta_{1mn}u) \sin(\beta_{2mn}w) \quad (7)$$

B) Estructura real

La estructura real EBG mostrada en la figura 2, tiene un número finito de celdas N_{cel} , por tanto, no existe periodicidad en la dirección longitudinal siendo, además, las guías de entrada y salida guías vacías. Por ello, el teorema de

Floquet no es aplicable, siendo necesario formular el problema en términos de la matriz de scattering. Hay que hacer notar que, en este caso en el que no existen discontinuidades transversales a la dirección de propagación, cada modo individual TE o TM satisface las condiciones de contorno en cada discontinuidad y por ello no es necesario plantearse una resolución a través de un método numérico como adaptación modal y el concepto de matriz de scattering generalizada. Para ello se calcula la matriz de scattering de cada discontinuidad individual, enlazándose todas ellas hasta obtener la matriz de scattering que caracteriza la estructura EBG completa [11]. El proceso totalmente análogo para una guía circular puede se puede ver en [12]

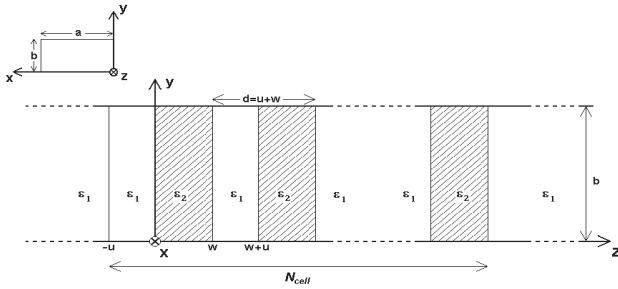


Fig. 2. Estructura EBG real en guía rectangular. Las guías de entrada y salida son guías vacías.

III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se han evaluado las funciones $L_{TE_{10}^z}$ y $L_{TM_{11}^z}$ para una guía de onda rectangular en banda X (22.86x10.16 mm.) como la de la figura 1. Se ha mantenido constante la razón u/w ($u=0.85d$) mientras que se ha variado el valor del espesor d de la celda ($d=u+w$). Además, $\epsilon_{r1}=1$ se ha mantenido fijo mientras que ϵ_{r2} se ha variado. En la figura 3 se muestran los valores de $L_{TE_{10}^z}$ y $L_{TM_{11}^z}$ para $\epsilon_{r2}=2$ y $d=60$ mm. A la frecuencia a la que γ es real, se produce transmisión completa de la señal y el medio es transparente a la onda electromagnética. Por el contrario a la frecuencia a la que γ no es real, la señal no se propaga y el medio no propaga la señal. Estas dos situaciones se identifican con la condición $-1 \leq \cos(\gamma d) \leq 1$. Por ello se han dibujado las líneas correspondientes a las funciones $L_{TE_{10}^z}$ y $L_{TM_{11}^z}$ igual a ± 1 .

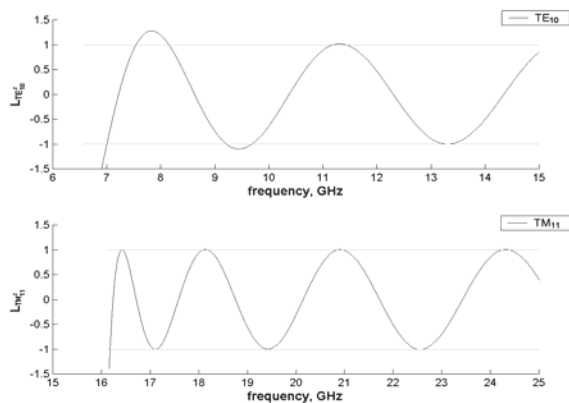


Fig. 3. Variación de $L_{TE_{10}^z}$ y $L_{TM_{11}^z}$ con la frecuencia para $\epsilon_{r1}=1$, $\epsilon_{r2}=2$ y $d=60$ mm en banda X.

Todos aquellos valores por encima o por debajo de las líneas identifican las bandas prohibidas y los que están entre ellas las bandas admitidas.

En la figura 4 se muestra la dependencia del band-gap (es decir, de las bandas de frecuencia prohibidas) en función de la frecuencia para cuatro relaciones de contraste dieléctrico $\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}$ y $d=45$ mm. Examinando las figuras se deduce que el número de band-gaps aumenta, para un valor fijo del espesor de la celda unidad, al aumentar el valor del contraste dieléctrico.

En la figura 5 se estudia la dependencia del band-gap con la anchura de la celda unidad. Se observa que a medida que dicha anchura crece las bandas de frecuencia permitidas y prohibidas se hacen más estrechas a la vez que aumenta el número de esas bandas.

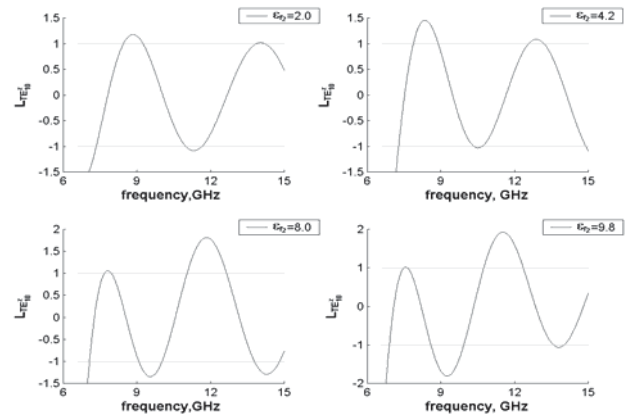


Fig. 4. Variación de $L_{TE_{10}^z}$ con la frecuencia, en guía en banda X, para diferentes valores de ϵ_{r2} . $\epsilon_{r1}=1$ y $d=45$ mm.

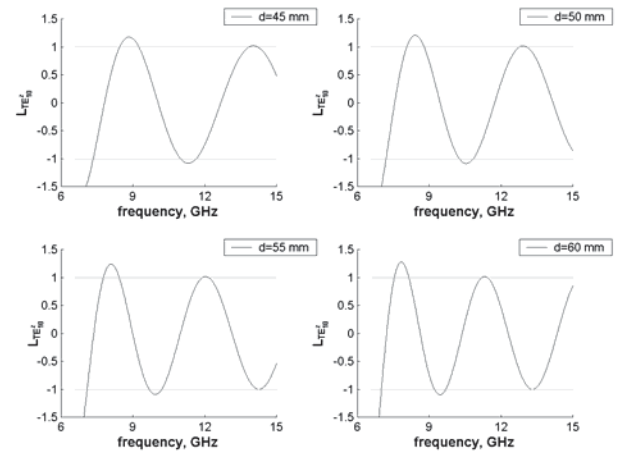


Fig. 5. Variación de $L_{TE_{10}^z}$ con la frecuencia, en guía en banda X, para diferentes valores del espesor de la celda d , con $\epsilon_{r2}=2$ y $\epsilon_{r1}=1$.

Todos los resultados mostrados se corresponden con la estructura ideal, de forma que las bandas están separadas por transiciones abruptas: la propagación, por ejemplo, es posible a una frecuencia f pero no a una $f+\Delta f$. En la figura 6 se muestra el coeficiente de transmisión hipotético, para la guía en banda X cuando $d=60$ mm y $\epsilon_{r2}=2$. Cuando $|L_{TE_{10}^z}| \leq 1$ el módulo del coeficiente de transmisión es la unidad ($|T|=1$) (banda permitida), mientras que si $|L_{TE_{10}^z}| > 1$ entonces $|T|=0$.

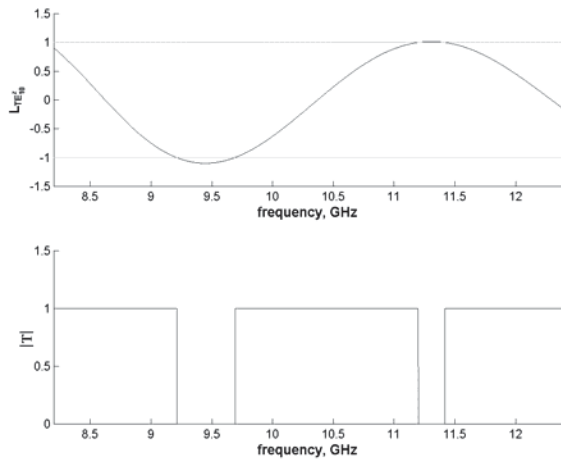


Fig. 6. Módulo del coeficiente de transmisión para la estructura EBG ideal con $\epsilon_r=2$, $\epsilon_r=1$ y $d=60m$, correspondiente a la variación de L_{TE10} con la frecuencia.

Como se ha mencionado anteriormente, una estructura EBG ideal no se puede implementar puesto que consta de un número infinito de celdas. Por el contrario, una estructura real contendrá un número finito de celdas. En la figura 7 se muestra una comparación entre los coeficientes de transmisión para una estructura EBG real (con número de celdas $N_{cel}=10, 25, 50$ y 75) y los correspondientes a las estructuras reales con $d=60mm$, $\epsilon_r=2$ y $\epsilon_r=1$. Se observa que a medida que el número de celdas aumenta la respuesta real tiende a la ideal.

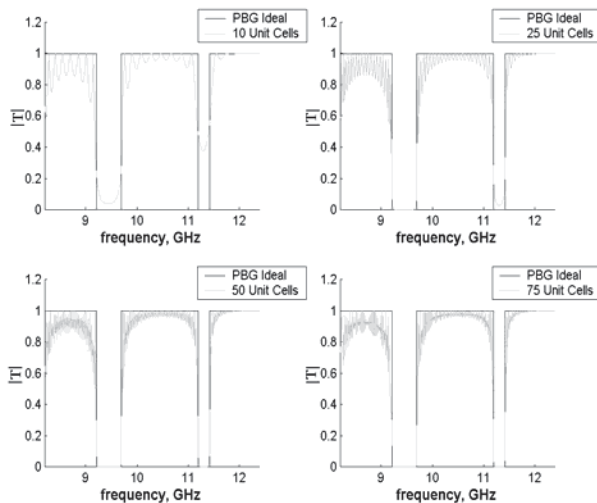


Fig. 7. Módulo de los coeficientes de transmisión para una secuencia de estructuras EBG con $\epsilon_r=2$, $\epsilon_r=1$ y $d=60mm$.

Aunque una estructura EBG ideal en la práctica no puede realizarse, su análisis es muy importante para obtener de forma rápida los valores iniciales de las permitividades y las dimensiones de la celda unidad que proporcionen la respuesta frecuencial requerida. Una vez determinados esos valores, se puede diseñar la estructura real con el número de etapas o celdas que se ajusten a las especificaciones.

IV. CONCLUSIONES

En esta comunicación se ha analizado la propagación den una guía de onda rectangular en banda X de una estructura EBG tanto en su configuración ideal como real. En el primer caso, la estructura es periódica de forma que se utiliza el teorema de Floquet para obtener la respuesta en cuanto a la transmisión de potencia. En el segundo caso, la estructura es finita con lo que es necesario resolver un problema electromagnético que involucra la matriz de scattering. Se han comparado los resultados de ambos tipos de estructuras demostrándose que los resultados correspondientes a la estructura real reales convergen con a la de la ideal a medida que el número de celdas aumenta.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Investigación, MCyT, a través del proyecto TIC2000-1612-C03-01.

REFERENCIAS

- [1] C. Y. Chang and W. C. Hsu: "Photonic band-gap dielectric waveguide filter", IEEE Microwave Wireless Components Letters, Vol. 12, No. 4, pp. 137-139, April 2002.
- [2] P. R. Villeneuve, D.S. Abrams and J.D. Joannopoulos: "Single-mode waveguide microcavity for fast optical switching", Optical Letters, Vol. 21, No. 24, pp. 2017-2019, 1996.
- [3] S. Fan, P. R. Villeneuve and J. D. Joannopoulos: "Large omnidirectional band gaps in metallodielectric photonic crystals", Physical Review B, No. 54, Vol. 16, pp. 11245-11251, 1996.
- [4] C. A. Kyriazidou, H. F. Contopanagos and N. G. Alexopoulos: "Monolithic waveguide filters using printed photonic-bandgap materials", IEEE Microwave Theory and Techniques, Vol. 49, No. 2, pp. 297-307, Feb. 2001.
- [5] F. Martrin, F. Falcone, J. Bonache, T. Lopetegui, M.A.G. Laso and M. Sorolla: "New periodic-loaded electromagnetic bandgap coplanar waveguide with complete spurious passband suppression", IEEE Microwave Wireless Components Letters, Vol. 12, No. 11, pp. 435-437, Nov. 2002.
- [6] H. Kopka and P.W. Daly, "A Guide to LaTeX", 3rd.ed., Harlow, England: Addison-Wesley, 1999
- [7] O. S. Heavens: "Optical properties of thin solid films", Butterworths, London U.K., 1955. Capítulo 5.
- [8] C. Kittel: "Introduction to solid state physics", John Wiley & Sons, New York 1971, pp. 695-699 y pp. 306.
- [9] S. K. Srivasta, S. P. Ojha and K. S. Ramesh: "Design of an ultraviolet filter based on photonic band-gap materials", Microwave Optical Technology Letters, Vol. 33, No. 2, pp. 308-314, 2002.
- [10] C. A. Balanis: "Advanced Engineering Electromagnetics", John Wiley & Sons, New York 1989, Cap. 8.
- [11] M.A. Solano, A. Prieto and A. Vegas: "Theretical and experimental study of two port structures composed of different size rectangular waveguides partially filled with isotropic dielectric", International Journal of Electronics, Vol. 85, No. 5, pp. 521-528, 1998.
- [12] A. Gómez, M. A. Solano, A. Lakhtakia and A. Vegas: "Circular waveguides with Kronig-Penney morphology as photonic band-gap filters", Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 37, No. 5, pp. 316-321, June 2003.